Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 1** **2011/12**

---

1. Sejam a, b e c três quaisquer números reais.
   Verifica (ou recorda) que
   (a) $a \leq |a|$, $-|a| \leq a$,
   (b) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

   e depois usa esta informação para mostrares que
   $$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{e} \quad |a-b| \leq |a| + |b|.$$
   Finalmente deduz a partir daqui que $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$.

2. Mostra que $|\,|a| - |b|\,| \leq |a-b|$, quaisquer que sejam os números reais a e b.

3. Seja A um conjunto não-vazio de números reais e $-A := \{-x : x \in A\}$. Verifica que:
   (a) b é majorante de $A \Leftrightarrow$ -b é minorante de $-A$.
   (b) b é supremo de $A \Leftrightarrow$ -b é ínfimo de $-A$.
   (c) b é máximo de $A \Leftrightarrow$ -b é mínimo de $-A$.

4. Determina, caso seja possível, o ínfimo, o mínimo, o supremo e o máximo de cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |1-x| \leq 2\}$.
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$.
   (c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$.
   (d) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1-n}{n}\}$.
   (e) $\mathbb{Q} \cap]-1, 2]$.
   (f) $\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \cap [1, 3[$.

5. Supõe que A e B são conjuntos de $\mathbb{R}$ não-vazios e limitados. Seja
   $$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$
   Prova que $A + B$ é limitado e que
   (a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
   (b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

6. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitado e $c \in \mathbb{R}$. Considera $cA := \{ca : a \in A\}$.
   (a) Prova que, se $c > 0$,
      i. $\sup(cA) = c \sup A$,
      ii. $\inf(cA) = c \inf A$.
   (b) Enuncia e demonstra o que ocorre quando $c < 0$.

7. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões limitadas de números reais. Prova que
   (a) $\sup\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) $\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

   Dá exemplos onde estas desigualdades sejam estritas.