Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 16** **2011/12**

---

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função integrável e primitivável, e seja F uma sua qualquer primitiva. Seja $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma qualquer partição de $[a,b]$.

   (a) Porque é que existe $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que $\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$?

   (b) Mostra que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = S(f, P, \xi)$, onde $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, e que, portanto,
   $$\underline{S}(f,P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f,P).$$

   Conclui que
   $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

   Informação: A expressão (1) diz-se a *fórmula de Barrow.* O seu 2º membro aparece muitas vezes escrito na forma abreviada $[F(x)]_a^b$, com o mesmo significado.

2. Calcula:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin x + \cos x\big)^2\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 x\sin(3x^2)\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

   (f) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

   (i) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

   (j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

   (k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

   (l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

   (m) $\displaystyle\int_2^{\frac{7}{2}} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

   (n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\,dx$

   (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

   (p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

   (q) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\ln(3x)}\,dx$

   (r) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

   (s) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

   (t) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. Determina a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2,2)$.

4. Determina a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ em $[\ln 2, \ln 5]$.

5. Determina a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

6. Seja $\mathscr{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\right\}$

   (a) Representa geometricamente a região $\mathscr{A}$.

   (b) Calcula a área da região $\mathscr{A}$.

7. Determina a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas retas de equações $x = -2$ e $x = 2$.