Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 2** **2011/12**

1. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão cujo termo geral é $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n+1}$.
   (a) Determina os cinco primeiros termos da sucessão.
   (b) Indica, justificando, o valor lógico das proposições:
      i. $\exists n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{14}{15}$
      ii. $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

2. Considera a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n = \frac{n+1}{n+2} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Verifica que a sucessão é monótona e que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{3} \leq x_n < 0$.

3. Mostra que uma sucessão de números diferentes de zero é limitada se e só se os termos da sucessão dos seus inversos se mantêm a uma distância mínima positiva de zero.

4. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão constante, i.e., tal que $u_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Diz qual é o valor lógico da proposição

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - c| < \varepsilon$$

   e traduz o seu significado para linguagem *corrente*.

5. Mostra que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge então também a correspondente sucessão dos módulos converge e $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |\lim_{n\to\infty} u_n|$.
   (Sugestão: usa a desigualdade do exercício 2 da Folha 1).

6. Mostra que toda a sucessão convergente é limitada. Por outro lado, exibe um exemplo que mostre que nem toda a sucessão limitada é convergente.

7. Calcula os limites das seguintes sucessões:
   (a) $\left(\dfrac{(-1)^n + n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) $\left(e^n + e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) $\left(\dfrac{3n^3 + n^2 + 1}{2n^3 - n - 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) $\left(\dfrac{n+5}{1+n^2} \sin \dfrac{\pi n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

8. Mostra que qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente e para o mesmo limite da sucessão.

9. Calcula, caso existam, os limites das seguintes sucessões:
   (a) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) $\left(\cos \dfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) $\left(\cos(n\pi) + (-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

10. Quando possível, dá exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e que verifiquem:
   (a) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
   (b) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$
   (c) $x_n + z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
   (d) $x_n z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
   (e) $\frac{x_n}{z_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$