Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 3** **2011/12**

---

1. Mostra que se uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$ possuir uma subsucessão convergente então terá obrigatoriamente que convergir para o limite dessa subsucessão.

2. Mostra que toda a sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.

3. Considera uma qualquer sucessão limitada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Iremos ver que admite uma subsucessão $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

   (a) Observa que existe de certeza um intervalo $[a, b]$ que contém o conjunto de todos os termos da sucessão e que, se o dividires ao meio em dois subintervalos, pelo menos um deles é *visitado* pelos termos da sucessão uma infinidade de vezes. Designa um tal subintervalo por $[a_1, b_1]$ e escolhe para $u_{\sigma(1)}$ um qualquer termo da sucessão nesse subintervalo.

   (b) Divide agora ao meio o subintervalo anterior e convence-te de que pelo menos uma das metades continua a ser *visitada* uma infinidade de vezes pelos termos da sucessão. Designa tal subintervalo por $[a_2, b_2]$ e convence-te de que há de certeza um termo da sucessão que *visita* esse subintervalo após a ordem $\sigma(1)$. Escolhe para $u_{\sigma(2)}$ um desses termos.

   (c) Convence-te de que podes continuar este processo indefinidamente, obtendo uma sucessão $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ tal que $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ e uma subsucessão $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ da sucessão dada tal que $u_{\sigma(n)} \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (d) Mostra que $|a_n - b_n| = 2^{-n}|a - b| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (e) Garante que existe um e um só número que pertence a todos os intervalos $[a_n, b_n]$ e designa tal número por c.

   (f) Mostra que $u_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.

4. Conjuga os três exercícios anteriores para concluires que toda a sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.