1. Prova por indução matemática a conhecida fórmula $S_k = r\frac{1-r^k}{1-r}$ para a soma S_k dos primeiros k termos da progressão geométrica $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de razão $r \neq 1$.

2. Tira partido do exercício anterior para mostrares que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ de razão $r \in \mathbb{R}$ converge se e só se $|r| < 1$. E que no caso de convergência a soma da série é $\frac{r}{1-r}$.

3. Mostra que se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem convergentes então também $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ é convergente, onde α e β são dois quaisquer números reais dados, verificando-se, além disso, que
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

4. Para cada uma das seguintes séries numéricas, determina a sucessão das somas parciais associada, calcula alguns dos primeiros termos dessa sucessão e, se possível, determina a soma da série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi)}{3^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

5. Mostra que os termos de uma qualquer série convergente constituem uma sucessão que converge sempre para zero.

6. O recíproco da afirmação contida no exercício anterior é falso, isto é, existem séries (até de termos positivos) divergentes cujo termo geral converge para zero. O objetivo do presente exercício é mostrar que a série harmónica, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, é um exemplo disso: designando por S_{2^k} a soma parcial de ordem 2^k dessa série, mostra que $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, que diverge para $+\infty$.

7. Dada uma qualquer série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e um qualquer $m \in \mathbb{N}$, mostra que tal série converge se e só se o seu resto de ordem m converge e que, no caso de convergência,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

8. Designando por S o conjunto dos símbolos $\pm c_0, c_1c_2c_3\ldots$ tais que $c_0 \in \mathbb{N}_0$ e, $\forall n \in \mathbb{N}, c_j \in \{0,\ldots,9\}$, associa a cada $x \in \mathbb{R}_0^+$ o elemento $+c_0, c_1c_2c_3\ldots$ (que também convencionamos poder escrever sem a indicação de sinal) de S construído através da seguinte regra:

   (i) c_0 é o único elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $c_0 \leq x < c_0 + 1$;

   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, c_n$ é definido indutivamente como o único elemento de $\{0,\ldots,9\}$ tal que
$$c_n 10^{-n} \leq x - \sum_{j=0}^{n-1} c_j 10^{-j} < c_n 10^{-n} + 10^{-n}.$$

   E depois associa a cada $x \in \mathbb{R}^-$ o símbolo $-c_0, c_1c_2c_3\ldots$, onde $c_0, c_1c_2c_3\ldots$ é o símbolo que se associou a $-x$. Mostra que esta associação de $\pm c_0, c_1c_2c_3\ldots$ de S a x de $\mathbb{R}$ estabelece uma aplicação $r : \mathbb{R} \to S$ tal que $x = \pm\sum_{n=0}^{\infty} c_n 10^{-n}$ (com o sinal escolhido de acordo com o sinal de x). Em particular, tal aplicação é injetiva (verifica!) e portanto $\mathbb{R}$ pode ser representado por elementos de S sem qualquer ambiguidade (o que é que a injetividade tem a ver com isto?). Como deves estar a reconhecer, trata-se da conhecida *representação decimal* dos números reais.